جامعة البعث	امتحانات الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٥-٢٠١٦	المدة : ساعة و نصف
كلية العلوم	سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)	العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	

جواب السؤال الأول (٢٨ درجة) :

أ) - لنأخذ $C(\mathbb{R})$ فضاء كل المتتاليات الحقيقية المتقاربة ولنعرف المسافة:

$$d(x,y)=\sup|x_i-y_i| \ ; \ x=\{x_i\}\wedge y=\{y_i\}$$

ولتكن $\{x^{(n)}\}$ متتالية كوشي عندئذٍ من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد عدد $N_0=N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون:

$$d(x^{(n)},y^{(n)})<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup\left|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}\right|<\varepsilon \ ; \ \forall i$$

ومنه نجد أن $\{x_i^{(n)}\}$ هي متتالية كوشي في $\mathbb{R}$ وبما أن الفضاء $\mathbb{R}$ تام فإنه يوجد x_i بحيث:

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}=x_i \ ; \ \forall i \ \ , n>N_0$$ أي أن : $\left|x_i^{(n)}-x_i\right|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \sup\left|x_i^{(n)}-x_i\right|<\varepsilon \ \ \Rightarrow d(x^{(n)},x)<\varepsilon$$

هذا يعني أنّ $\{x^{(n)}\}$ متتالية متقاربة من x ، بقي إثبات أن $x\in C(\mathbb{R})$ فيتم المطلوب.

ليكن $N=N_0$ وبما أن $\{x_i^{(N)}\}\in C(\mathbb{R})$ فهي إذاً متتالية كوشي أي أن :

$$\left|x_i^{(N)}-x_j^{(N)}\right|<\varepsilon \ ; \ i,j>N(\varepsilon)$$

بالتالي من أجل : $i,j>N(\varepsilon)$ يكون :

$$\left|x_i-x_j\right|=\left|x_i-x_i^{(N)}+x_i^{(N)}-x_j+x_j^{(N)}-x_j^{(N)}\right|\le$$

$$\le d(x,x^{(N)})+d(x^{(N)},x)+\left|x_i^{(N)}-x_j^{(N)}\right|\le\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

أي أن $x=\{x_i\}$ هي متتالية كوشي في $\mathbb{R}$ فهي متقاربة في $\mathbb{R}$ أي أنّ $x\in C$.

- اذا كان (X,d) فضاء متري عندئذٍ يكون الفضاء (X,d) تاماً إذا وفقط إذا كان تقاطع أي مجموعة من الكرات المغلقة المتداخلة بعضها ببعض غير خالٍ .

ب)- لدينا هنا $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مع أن $\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ d\right)$ فضاء متري و d مقصور المسافة الأقليدية

$$x\mapsto g(x)=\frac{2}{3}\sin x$$

على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

28

كون التطبيق g تطبيق اشتقاقي (أو قابل للمفاضلة) وأن $|g'|=\left|\frac{2}{3}\cos x\right|\le\frac{2}{3}<1$ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ، فعندها

يكون g ضاغطاً على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لأن :

$$d(g(x),g(y)) = |g(x)-g(y)|=g'_a|x-y|\le\frac{2}{3}|x-y| \quad ;x<a<y$$

وطالما أصبح ضاغطاً فهو مستمر بانتظام على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ونقاطه الثابتة هي $x=0$ حيث $g(0)=0$.

جواب السؤال الثاني (٢٢ درجة) :

أ)- لدينا (Y,ρ) فضاء متري متقطع ولنوجد كل من الكرات :

$$S(a,r)=\{a\} \quad \& \ S[a,r]=\{a\} \quad ;r<1,a\in y$$

وكذلك

$$S(a,r)=y \quad \& \ S[a,r]=y \quad ;r>1,a\in y$$

ب)- يكون التطبيق هوميومورفزماً إذا وفقط إذا كان تقابلاً وثنائي الاستمرار (f, f^{-1} مستمرين) .إن التطبيق f تقابل لأنه للمعادلة $f(x)=y=x$ حل وحيد وحسب تعريف المسافات على $\mathbb{C}^n$ والعلاقة بينهم يكون :

$$c(f(x),f(y))=c(x,y)\le d(x,y)\le\sqrt{n}c(x,y) \ ; \ x,y\in\mathbb{R}^n$$

هذا يعني استمرار f, f^{-1}. بالتالي التطبيق هوميومورفزم .

-- نقول عن فضاءين خطيين منظمين E_1وE_2 (حقيقيين معاً أو عقديين معاً) أنهما إيزومورفيان لبعضهما فيما إذا وجد تطبيق غامر $\varphi:E_1\to E_2$ ويحقق الشرطين :

أ) أياً كان العنصران x_1 وx_2 من E_1 وأياً كان العددان λ_1,λ_2 فإن $\varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2)$

أي أن φ تطبيق خطي .

ب)أيا كان العنصر $x\in E$ فإن $\|\varphi(x)\|_{E_2}=\|x\|_{E_1}$ أي أنّ φ يحافظ على النظيم .

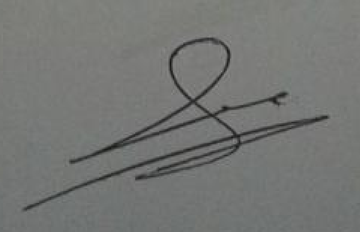
– ويمكن تعريف الإيزومورفيزم بين فضاءين خطيين منظمين على أنه تطبيق خطي ومتباين وغامر يحافظ على النظيم .

ت)- نعلم أنّ: $\left(|x+y|^p\le2^p\left(|x|^p+|y|^p\right)\right)$ وبالتالي فإنّ $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\le\sum_{n=1}^{\infty}2^p\left(|x_n|^p+|y_n|^p\right)$

أي: $$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\le\sum_{n=1}^{\infty}2^{p-1}\left(|x_n|^p+|y_n|^p\right)$$

كما أن: $\sum_1^{\infty}|\lambda.x_n|^p=|\lambda|^p\sum_1^{\infty}|x_n|^p<\infty$ بذلك نجد أنّ : $\lambda x\in\ell_p \ , \ x+y\in\ell_p$

22



جواب السؤال الثالث (٧+٧=١٤ درجة):

أ) لنبين أولاً أن $(T^*)^*=T$: $(y,(T^*)^*x)=(T^*y,x)=\overline{(x,T^*y)}=\overline{(Tx,y)}=(y,Tx)$ وبالتالي

فإن $(T^*)^*x=Tx$ وذلك من أجل كل $x\in H$ وبالتالي $(T^*)^*=T$.

ثانياً: بما أن $\|T\|=\|T^*\|$ فإن: $\|T^*T\|\le\|T^*\|.\|T\|=\|T\|^2$

ومن جهة أخرى:

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)\le\|T^*Tx\|\|x\|\le\|T^*T\|.\|x\|^2$$

وبالتالي $\|T\|^2\le\|T^*T\|$ بذلك نستنتج أن $\|T\|^2=\|T^*T\|$.

ب)- إن $\ker T\subseteq\left(\mathrm{Im}T^*\right)^\perp$ وذلك لأنه من أجل $x\in\ker T$ و $z\in\mathrm{Im}T^*$. بما أن $z\in\mathrm{Im}T^*$ فإنه يوجد $y\in K$ بحيث أن $T^*y=z$.

$$(x,z)=\left(x,T^*y\right)=(Tx,y)=0$$

عندئذ $x\in\left(\mathrm{Im}T^*\right)^\perp$ وبالتالي $\ker T\subseteq\left(\mathrm{Im}T^*\right)^\perp$.

اثبات المتراجحة المعاكسة: إن $\left(\mathrm{Im}T^*\right)^\perp\subseteq\ker T$ وذلك لأنه من أجل $v\in\left(\mathrm{Im}T^*\right)^\perp$ فإن: $T^*Tv\in\mathrm{Im}T^*$ وبالتالي:

$$(Tv,Tv)=(v,T^*Tv)=0$$

أي أن $Tv=0$ وبالتالي فإن $v\in\ker T$ وبذلك نكون قد برهنا أن $\ker T=\left(\mathrm{Im}T^*\right)^\perp$. وهو المطلوب.

جواب السؤال الرابع (١٥ درجة):

$$S(x_1,x_2,x_3,\ldots)=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots)$$

المحدودية: $\|Sx\|=\|(0,x_1,x_2,x_3,\ldots)\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_{\ell_2}$ اذن المؤثر محدود.

النظيم: من المحدودية لدينا: $\|Sx\|=\|x\|_{\ell_2}$ أي أن: $\|S\|=\sup_{x\neq\theta}\frac{\|Sx\|}{\|x\|_{\ell_2}}=1$ من أجل أي $x\in\ell^2$.

المرافق: بفرض $x=\{x_n\}, \ell^2\ni y=\{y_n\}$ ولتكن $x=\{x_n\}$، $z=\{z_n\}=S^*(y)$ عندئذ

$(Sx,y)=(x,S^*y)$ وبالتالي:

$$((0,x_1,x_2,x_3,\ldots),(y_1,y_2,y_3,\ldots))=((x_1,x_2,x_3,\ldots),(z_1,z_2,z_3,\ldots))$$

3

عندئذٍ: $x_1\overline{y_2}+x_2\overline{y_3}+x_3\overline{y_4}+\ldots=x_1\overline{z_1}+x_2\overline{z_2}+x_3\overline{z_3}+\ldots$

عندئذٍ: $z_1=y_2,\ z_2=y_3,\ \ldots$ عندئذٍ المعادلة صحيحة.من أجل كل $x_1,x_2,x_3,\ldots$ وبما أن المرافق وحيد

فإن:

3

$$S^*(y_1,y_2,y_3,\ldots)=(z_1,z_2,z_3,\ldots)=(y_2,y_3,y_4,\ldots)$$

جواب السؤال الخامس (١٥+٦=٣١ درجة) إذا كان $S=\{\theta\}$ فإن $f=0$. وفي هذه الحالة يكون $\tilde{f}=0$.

3

لنفترض الآن أن $S\neq\{\theta\}$. ولنضع $x\in E\ ;\ (1)p(x)=\|f\|_S.\|x\|$ ولنبين أن $p(x)$ دالي خطي جزئي على E.

(i) من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من E فإن:

3

$$p(x_1+x_2)=\|f\|\|x_1+x_2\|\leq\|f\|(\|x_1\|+\|x_2\|)$$
$$=\|f\|\|x_1\|+\|f\|\|x_2\|=p(x_1)+p(x_2)$$

(ii) من أجل أي عنصر x من E وأي عدد $\alpha>0$ لدينا:

$$p(\alpha x)=\|f\|\|\alpha x\|=|\alpha|\|f\|\|x\|=\alpha\|f\|\|x\|=\alpha p(x)$$

إذن p دالي خطي جزئي فعلاً .

3

بما أن f محدود بالفرض على S فيكون: $\forall s\in S\ ;\ |f(s)|\leq\|f\|_S\|s\|$ أي أن: $|f(s)|\leq p(s)$

وبالتالي: $\forall s\in S\ ;\ f(s)\leq p(s)$ إذن يوجد دالي خطي $\tilde{f}$ على E بحيث إن:

$$\tilde{f}(s)=f(s)\ ;\ \forall s\in S\ \ \&\ \ \tilde{f}(x)\leq p(x)\ ;\ \forall x\in E$$

لدينا الآن بحسب (1): $\tilde{f}(x)\leq\|f\|\|x\|$ (2)

ولكن وبما أن: $\tilde{f}(-x)\leq\|f\|\|-x\|\ ;\ \forall x\in E$

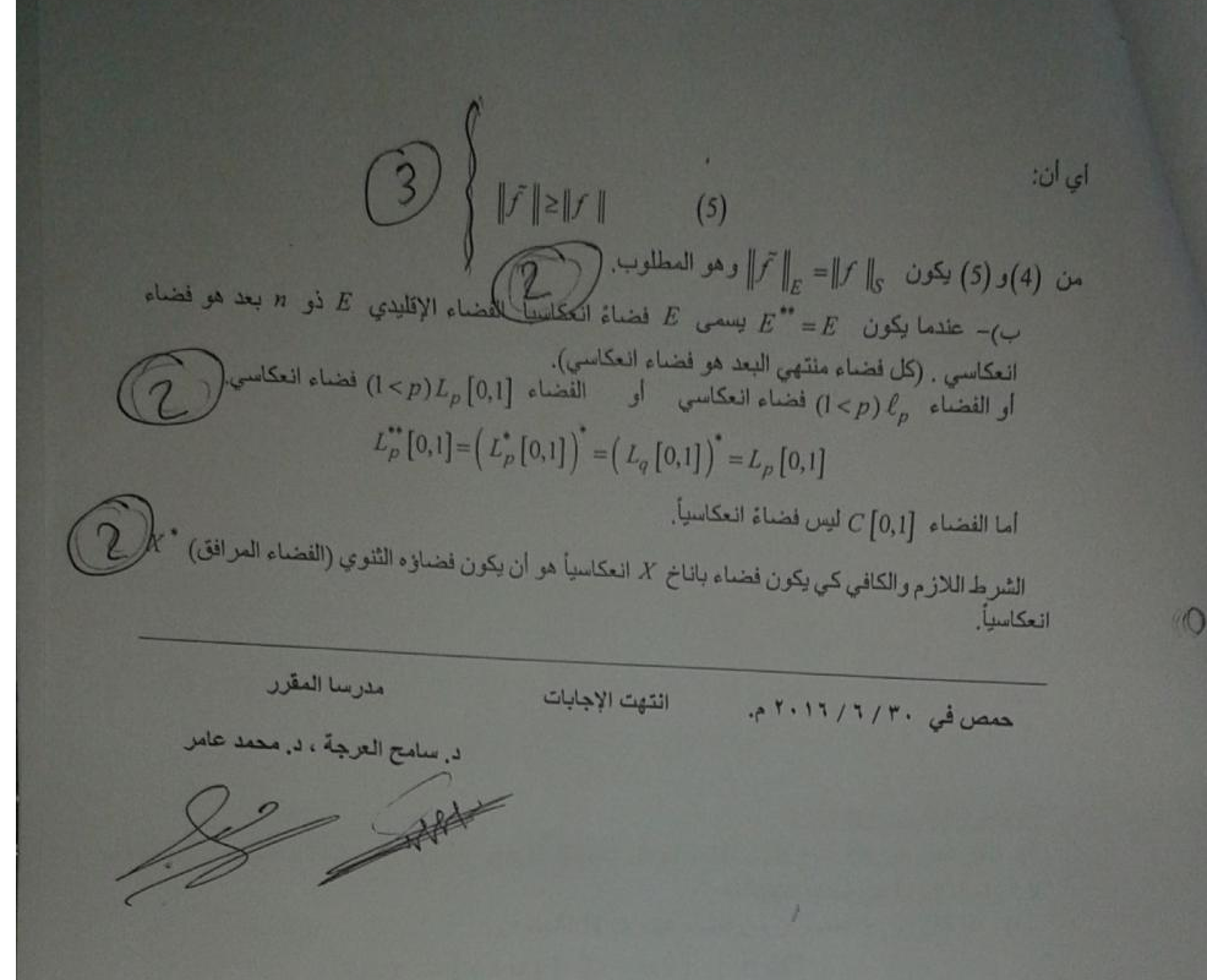
أي أن: $-\tilde{f}(x)\leq\|f\|\|-x\|\ ;\ \forall x\in E$ (3)

3

فنجد من (2) و (3) أن: $|\tilde{f}(x)|\leq\|f\|\|x\|\ ;\ \forall x\in E$

إذن الدالي $\tilde{f}$ محدود ويكون: (4) $\|\tilde{f}\|_E\leq\|f\|_S$

لدينا الآن: $\|f\|_S=\sup_{\substack{s\in S\\ \|s\|\leq1}}|f(s)|=\sup_{\substack{s\in S\\ \|s\|\leq1}}|\tilde{f}(s)|\leq\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq1}}|\tilde{f}(x)|=\|\tilde{f}\|_E$



اي أن:

$$\|\tilde{f}\| \geq \|f\| \qquad (5)$$

من (4)و(5) يكون $\|\tilde{f}\|_E = \|f\|_S$ وهو المطلوب.

ب)- عندما يكون $E^{**}=E$ يسمى E فضاءً انعكاسياً الفضاء الإقليدي E ذو n بعد هو فضاء انعكاسي . (كل فضاء منتهي البعد هو فضاء انعكاسي).

أو الفضاء ℓ_p $(1<p)$ فضاء انعكاسي أو الفضاء $L_p[0,1]$ $(1<p)$ فضاء انعكاسي.

$$L_p^{**}[0,1] = \left(L_p^{*}[0,1]\right)^{*} = \left(L_q[0,1]\right)^{*} = L_p[0,1]$$

أما الفضاء $C[0,1]$ ليس فضاءً انعكاسياً.

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء باناخ X انعكاسياً هو أن يكون فضاؤه الثنوي (الفضاء المرافق) X^{*} انعكاسياً.

حمص في ٣٠ / ٦ / ٢٠١٦ م.   انتهت الإجابات   مدرسا المقرر

د. سامح العرجة ، د. محمد عامر